Chr. Groth

Juni 2002

Økonomisk kandidateksamen 2002 II: Videregående vækstteori

RETTEVEJLEDNING

1 Opg. 1

Når "indkomstkløften" mellem verdens lande skal belyses, kunne man forestille sig at benytte spredningen (standardafvigelsen) på BNP pr. indbygger i et givet år:

$$s(y) \equiv \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2},$$

hvor y er BNP pr. indbygger, n antallet af lande, og $\bar{y} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. Dette mål har imidlertid den skavank, at hvis fx alle landenes indkomst fordobles, så fordobles også $s(y)$, selv om man næppe ville sige, at uligheden mellem landene var blevet større. Det er derfor mere oplagt at benytte spredningen på de *relative* indkomster:

$$s(\frac{y}{\bar{y}}) \equiv \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i}(\frac{y_i}{\bar{y}} - 1)^2}.$$

Dette mål er identisk med den såkaldte variationskoefficient, $CV(y)$, defineret ved

$$CV(y) \equiv \frac{s(y)}{\bar{y}}. \tag{1.1}$$

At de to mål er identiske ses af, at

$$\frac{s(y)}{\bar{y}} \equiv \frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (y_i - \bar{y})^2}}{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i(\frac{y_i - \bar{y}}{\bar{y}})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i(\frac{y_i}{\bar{y}} - 1)^2} \equiv s(\frac{y}{\bar{y}}).$$

I stedet for variationskoefficienten bruges ofte spredningen på $\log y$:

$$s(\log y) \;\equiv \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log y_i - \log y^*)^2}, \tag{1.2}$$

hvor $\log y^* \equiv \frac{\sum_{i=1}^n \log y_i}{n}$, dvs. y^* er det geometriske gennemsnit ($\equiv \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}$). Da vi ved en førsteordens Taylorapproksimation af $\log y$ omkring $\bar{y}$ har

$$\log y \approx \log \bar{y} + \frac{1}{\bar{y}}(y - \bar{y}),$$

er $s(\log y) \approx s(y/\bar{y}) = CV(y)$, men tilnærmelsen kan være ret dårlig (jf. nedenfor). Endnu et muligt mål for indkomstuligheden mellem verdens lande er Gini-indekset.

Hvis vi sammenligner indkomstuligheden i dag med, hvad den skønnes at have været for 100-150 år siden, er der mange tegn på en betydelig stigning (jf. Pritchett's "Divergence. Big Time"). Ser vi alene på udviklingen efter ca. 1960 er der derimod snarere tale om nogenlunde konstans på globalt niveau. Benyttes $s(\log y)$ er der tale om en svag stigning, og benyttes $CV(y)$ er der tale om et svagt fald (Dalgaard & Vastrup 2001).[1] Erstattes $s(\log y)$ med et tilsvarende mål, hvor de enkelte lande er vægtet efter deres befolknings størrelse, udviser dette vejede gennemsnit en svagt faldende tendens (jf. den kraftige produktivitetsvækst i befolkningsrige lande som Kina og Indien i de sidste par årtier).

Ved at betragte hele tæthedsfunktionen for den globale fordeling finder Jones (1997), at en énpuklet fordeling i 1960 har udviklet sig til en topuklet fordeling i 1988 ("twin-peaks").[2] En betydelig del af de meget fattige lande er forblevet fattige, mens en del af de "mellemrige" lande har haft relativt kraftig vækst. Når der vægtes efter landebefolkningernes størrelse bliver tendensen til to pukler mindre udtalt.

Ser vi i stedet på udviklingen inden for fx OECD-landene eller EU (lande med handelssamkvem og nogenlunde ens strukturelle karakteristika) er der i tiden efter 2. verdenskrig tendens til indkomstkonvergens (aftagende $CV(y)$ og $s(\log y)$).

2 Opg. 2

Kilde: Primært B&S, kap. 6.1. Derudover bl.a. Romer (1990), Jones (1995), og Dalgaard & kreiner (2001).

For bekvemmeligheds skyld gentages her de i opgaven angivne centrale relationer:

[1] Forfatterne betragter BNP pr. arbejdstime, ikke pr. indbygger, men det gør i denne sammenhæng næppe den store forskel.

[2] Jones betragter BNP pr. arbejdstime, ikke pr. indbygger, men det gør i denne sammenhæng næppe den store forskel.

Virksomhed nr. i i basisvaresektoren:

$$Y_i = A{L_i}^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N} (x_{ij})^{\alpha}, \;\; A > 0, \;\; 0 < \alpha < 1, \;\; A \text{ og } \alpha \text{ konstante.} \tag{2.1}$$

Den del af basisvare-produktionen, der anvendes (pr. tidsenhed) til fremstilling af specialiserede inputvarer:

$$Y_X = Y - C - Y_R. \tag{2.2}$$

Iværksættersektorens “innovationsfunktion”:

$$\dot{N} = Y_R/\eta, \;\; \eta > 0, \;\; \eta \text{ konstant.} \tag{2.3}$$

Når først inputvare j er opfundet, kræves der til at fremstille én enhed af den én basisvare og ikke andet:

$$1 \text{ basisvare} \quad \curvearrowright \quad 1 \text{ inputvare } j. \tag{2.4}$$

Dette gælder for alle $j = 1, 2, ..., N$.

a) Der er tale om B & S's version af Romers 1987-model for innovationsbaseret vækst. Ligningerne (2.1) og (2.4) giver en formalisering af den hypotese, at opfindelser af stadig nye typer inputvarer og den deraf følgende arbejdsdeling og specialisering øger det økonomiske systems effektivitet (der er effektivitetsmæssige fordele ved “omvejsproduktion”, et bredt netværk af specialiserede produktionsgrene understøtter produktiviteten i basisvareproduktionen).

Modellens specialiserede inputvarer er ikke-varige, idet det er oplyst, at der ikke er nogen realkapital i modellen. I Romers 1990-model er de specialiserede inputvarer derimod kapitalgoder, altså inputvarer der varer ud over den enkelte produktionsproces. Dette har betydning for tilpasningsdynamikken. Desuden benyttes i nærværende model kun én og samme slags arbejdskraft; det centrale allokeringsproblem drejer sig om, hvordan produktet Y af den samlede arbejdsstyrke allokeres på de alternative anvendelser, Y_X, Y_R og C. Romers 1990-model[3] er derimod konstrueret sådan, at basisvaresektoren benytter både ”ufaglært” og ”faglært” arbejdskraft (af Romer kaldt ”human capital”), mens opfinderaktiviteten alene benytter ”faglært” arbejdskraft; det centrale allokeringsproblem bliver da, hvordan den ”faglærte” del

[3] Her tænkes på hans originale artikel. Det er også i orden at referere til den lidt enklere version i B&S (§ 6.1.7), hvor der kun er én type arbejdskraft og kun ikke-varige inputgoder.

af arbejdsstyrken bliver fordelt på de alternative aktiviteter; sondringen mellem de to slags arbejdsudbud i Romer 1990 stikker dog ikke særlig dybt, da begge udbud er eksogene i modellen.

(2.3) er en formalisering af det faktum, at innovation er en ressourcekrævende aktivitet. I denne model er dette repræsenteret ved, at der til at lave én innovation (opfinde én ny type inputvare) medgår η enheder af basisvaren. Dette kan ses som en forenklet formulering af en antagelse om, at teknologien i innovationsaktivitet er essentielt den samme som i basisvareproduktion (bortset fra omregningsforholdet η). I Romers 1990-model er teknologien i innovationsaktivitet *ikke* den samme som i basisvareproduktionen, idet (2.3) er erstattet med et udtryk af formen

$$\dot{N} = \bar{\delta} H_N, \qquad \bar{\delta} = \delta N, \qquad \delta > 0, \tag{2.5}$$

hvor H_N er samlet input af "faglært" arbejdskraft, og hvor det enkelte forskningslaboratorium tager produktiviteten, $\bar{\delta}$, for givet; på aggregeret niveau er produktiviteten imidlertid proportional med N opfattet som et mål for den samlede tekniske viden i samfundet. Herved får innovationsaktivitet i Romers 1990-model en positiv ekstern effekt, som ikke er med i nærværende 1987-model.

b) Da opfinderen af inputvare j har taget evigtvarende patent på den kommercielle anvendelse af opfindelsen, agerer vedkommende i sin prisfastsættelse som monopolist. Målet for monopolisten er at opnå størst mulig nutidsværdi, $V_j(t)$, af hele den fremtidige indtjeningstrøm. Den løbende indtjening, profitten, er

$$\pi_j(t) \equiv (p_j(t) - 1)X_j(t), \tag{2.6}$$

hvor $X_j(\tau)$ er den solgte mængde på tidspunkt τ; vi bruger basisvarer som regneenhed, og w er lønnen. Nutidsværdien af hele den (forventede) fremtidige indtjeningstrøm er derfor

$$V_j(t) = \int_t^\infty \pi_j(\tau) e^{-\int_t^\tau r(s)ds} d\tau. \tag{2.7}$$

Da der ikke er afhængighed mellem de forskellige tidspunkter, kan prissætningsproblemet reduceres til at finde den statiske monopolpris på hvert tidspunkt. Denne pris afhænger af efterspørgslen, $X_j(p_j)$, efter inputvare j på det pågældende tidspunkt, en efterspørgsel der kommer fra basisvaresektoren, som vi derfor først må se på.

Betragt virksomhed nr. i i basisvaresektoren. Denne er underlagt fuldkommen konkurrence og står derfor over for profitmaksimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \max_{L_i,(x_{ij})_{j=1}^N} \Pi_i &= Y_i - wL_i - \sum_{j=1}^N p_j x_{ij} \text{ ub.} \\ Y_i &= A{L_i}^{1-\alpha} \sum_{j=1}^N (x_{ij})^\alpha. \end{aligned}$$

FOC bliver:

$$\partial \Pi_i / \partial L_i = \partial Y_i / \partial L_i - w = (1-\alpha) A L_i^{-\alpha} \sum_{j=1}^N (x_{ij})^\alpha - w = 0, \tag{2.8}$$

$$\partial \Pi_i / \partial x_{ij} = \partial Y_i / \partial x_{ij} - p_j = \alpha A {L_i}^{1-\alpha} x_{ij}^{\alpha - 1} - p_j = 0, \quad j = 1, 2, ..., N. \tag{2.9}$$

(2.9) giver efterspørgslen

$$x_{ij} = L_i (\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}} p_j^{-\frac{1}{1-\alpha}}, \quad j = 1, 2, ..., N. \tag{2.10}$$

Den samlede efterspørgsel efter inputvare j bliver altså

$$X_j^d = \sum_i x_{ij} = L \left(\alpha A\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} p_j^{-\frac{1}{1-\alpha}} \equiv X_j(p_j),$$

hvor vi har erstattet $\sum_i L_i$ med det givne arbejdsudbud L.

Nu er vi klar til at løse prisfastsættelsesproblemet for monopolisten (iværksætter j):

$$\max_{p_j} \pi_j = (p_j - 1) X_j \text{ ub.} \tag{2.11}$$

$$X_j = L \left(\alpha A\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} p_j^{-\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{2.12}$$

Her kan man indsætte bibetingelsen (2.12) i (2.11), differentiere mht. p_j og sætte lig nul. Alternativt kan vi blot benytte vor almindelige viden om, at en monopolists profitmaksimerende pris opfylder reglen $MR = MC$, dvs. $p_j(1 + 1/E_{X_j,p_j}) = 1$, hvor efterspørgslens priselasticitet E_{X_j,p_j} er $-1/(1-\alpha)$ fra (2.12). Indsætning giver

$$p_j = \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha} \equiv p > 1. \tag{2.13}$$

Pga. monopolet er prisen større end $MC = 1$. Pga. den mængde-uafhængige priselasticitet er markup'en konstant, og da tillige MC er konstant, er prisen konstant. Og pga. symmetrien på tværs af iværksættervirksomhederne, er prisen uafhængig af j.

Indsætning i (2.12) giver

$$X_j = LA^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \equiv X, \tag{2.14}$$

hvorved

$$\pi_j = (\frac{1}{\alpha} - 1)X \equiv \pi. \tag{2.15}$$

Iværksættervirksomhed nr. j (eller patent nr. j) får iflg. (2.7) nutidsværdien (= markedsværdien)

$$V_j(t) = (\frac{1}{\alpha} - 1)LA^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \int_t^{\infty} e^{-\int_t^{\tau} r(s)ds} d\tau \equiv V(t). \tag{2.16}$$

Alle iværksættervirksomheder tager altså samme pris p, sælger samme løbende mængde X, får samme løbende indtjening π og har samme nutidsværdi $V(t)$.

En betingelse for ligevægt med $\dot{N} > 0$ (aktiv innovationsindsats) er, at nutidsværdien af den forventede fremtidige indtjening, som en innovation vil give, er lig omkostningen pr. innovation, dvs.

$$V(t) = \eta. \tag{2.17}$$

Thi hvis $V(t) > \eta$, vil alle satse "vildt" på F&U, og der vil være uendelig stor efterspørgsel efter finansiering til at anskaffe resourcer til F&U. Dette vil drive realrenten op og dermed iflg. (2.16) drive nutidsværdien $V(t)$ ned. Hvis omvendt $V(t) < \eta$, vil ingen investere i F&U; de finansielle midler fra husholdningernes ønskede opsparing bliver ikke efterspurgt, hvorfor renten vil falde, og $V(t)$ gå op, indtil $V(t) = \eta$.

Dette kan vi kombinere med den almindelige no-arbitrage-betingelse, at afkastet ved alternative placeringer skal være ens (når der ikke er usikkerhed). Afkastraten ved at placere sin formue i iværksætteraktier er $\left[\pi(t) + \dot{V}(t)\right] / V(t)$, og ved at placere formuen i almindelige lån er afkastraten $r(t)$. No-arbitrage-betingelsen er altså

$$\frac{\pi(t) + \dot{V}(t)}{V(t)} = r(t) \text{ for alle } t. \tag{2.18}$$

I ligevægt med forskningsaktivitet gælder (2.17) og derfor $\dot{V}(t) = 0$. Indsætning i (2.18) giver

$$r(t) = \pi/\eta = (\frac{1}{\alpha} - 1)X/\eta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{L}{\eta}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \equiv r, \tag{2.19}$$

hvor andet og tredje lighedstegn følger af hhv. (2.15) og (2.14). Hermed har vi fået bestemt realrenten.

Den repræsentative husholdning maksimerer sin intertemporale nyttefunktion

$$U_0 = \int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \tag{2.20}$$

inden for rammerne af sin budgetrestriktion. Vi ved, at løsningen af dette problem opfylder Keynes-Ramsey-reglen

$$\dot{c}(t)/c(t) = (1/\theta)(r(t) - \rho). \tag{2.21}$$

Indsættes heri (2.19), fås

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{L}{\eta} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} - \rho\right] \equiv \gamma. \tag{2.22}$$

Denne vækstrate er bestemt af konstante parametre og er altså identisk med pr. capita-forbrugets vækstrate i steady state.

c) At realrenten er tidsuafhængig kan tyde på, at der er tale om en "AK-lignende model". For at checke dette udledes den aggregerede produktionsfunktion. Vi har fra (2.13) og (2.10), at $x_{ij} = x_i$ for alle j. Med definitionen $y_i \equiv Y_i/L_i$ har vi derfor fra (2.1)

$$y_i = AL_i^{-\alpha} N x_i^\alpha = AN(x_i/L_i)^\alpha \tag{2.23}$$

Men da alle virksomheder vælger samme x_i/L_i, haves

$$x_i/L_i = \sum_i x_i / \sum_i L_i = X/L,$$

hvor X er givet ved (2.14). Vi får hermed

$$Y = \sum_i Y_i = \sum_i y_i L_i = AN(X/L)^\alpha \sum_i L_i = ANL^{1-\alpha}X^\alpha = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} LN \equiv \bar{A}N. \tag{2.24}$$

Den aggregerede *netto*produktion eller værditilvækst er altså

$$Y - Y_X = Y - NX = (\bar{A} - X)N = (\frac{1}{\alpha^2} - 1)A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} LN, \tag{2.25}$$

dvs. vi har den for AK-lignende modeller karakteristiske egenskab, at der på aggregeret niveau er proportionalitet mellem værditilvækst og akkumulerbart input (her vidensbeholdningen N).

Værditilvæksten anvendes til hhv. forbrug, C, og investering, Y_R, i F&U, dvs. $C+Y_R = Y - Y_X$. Indsætning af (2.3) og ordning giver $\dot{N} = (1/\eta)\left[(\bar{A} - X)N - C\right]$, der, skrevet på standardformen for en 1. ordens lineær differentialligning, bliver:

$$\dot{N} - \frac{1}{\eta}(\bar{A} - X)N = -C_0 e^{\gamma t} \tag{2.26}$$

fra (2.22). Det initiale forbrugsniveau $C_0 \equiv c_0 L$ er endogent, men fra vort almindelige kendskab til AK-lignende modeller ved vi, at den eneste løsning af (2.26), der er konsistent både med husholdningens NPG-betingelse og dens transversalitetsbetingelse er den, hvor

$$\dot{N}/N = \gamma \text{ for alle } t. \tag{2.27}$$

Dermed er iflg. (2.26) $C_t/N_t = \bar{A} - X - \eta\gamma$ for alle t.

Da

$$y \equiv Y/L = \bar{A}N/L, \tag{2.28}$$

vokser y med samme rate som N, dvs. raten γ. Igen "no transitional dynamics".

For at forløbet kan indebære *positiv* vækst, vil vi forudsætte parameterrestriktionen

$$\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{L}{\eta} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} > \rho. \tag{2.29}$$

Til sikring af, at husholdningens problem er veldefineret (U_0 begrænset), kræves tillige parameterrestriktionen

$$(1 - \theta)\gamma < \rho, \tag{2.30}$$

hvor γ er givet ved (2.22).

En knapt så matematisk fremstilling er også OK.

d) Af resultatet (2.22) ses, at:

$\partial\gamma/\partial\rho = -1/\theta < 0$. Større utålmodighed $\Rightarrow$ lavere "opsparingstilbøjelighed" $\Rightarrow$ mindre satsning af ressourcer på F&U.

$\partial\gamma/\partial\theta = -\frac{1}{\theta^2}\left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{L}{\eta} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} - \rho\right] = -\frac{\gamma}{\theta} < 0$. Større ønske om forbrugsudjævning $\Rightarrow$ lavere villighed til at udskyde forbrug $\Rightarrow$ mindre satsning af ressourcer på F&U.

$\partial\gamma/\partial A = \frac{L}{\theta\alpha\eta}A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} > 0$. Højere faktorproduktivitet $\Rightarrow$ højere afkastrate på opsparing $\Rightarrow$ større opsparing på aggregeret niveau (hvor den negative substitutionseffekt og formueeffekt på forbruget dominerer over den positive indkomsteffekt) $\Rightarrow$ større satsning af ressourcer på F&U.

$\partial\gamma/\partial\eta = -\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{L}{\eta^2}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} < 0$. Jo større F&U omkostningen er, jo mindre F&U.

$\partial\gamma/\partial L = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{1}{\eta}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} > 0$. Jo større L er, jo lavere er pr. capita-omkostningen, η/L, ved F&U (et ikke-rivaliserende gode), og jo større bliver satsningen på F&U og dermed (i denne model) vækstraten. Dette er den omdiskuterede "skalaeffekt" i innovationsbaserede vækstmodeller (med strengt endogen vækst).

Skalaeffekten indebærer, at for to forskellige (isolerede) lande, der er ens mht. alle parametre bortset fra L, vil landet med størst L have højest vækstrate.

e) Af (2.4) ses, at de forskellige inputgoder har samme enhedsomkostninger. Derfor kræver statisk efficiens, at alle virksomheder i basisvaresektoren dels benytter de forskellige inputgoder i lige store mængder, dvs. for alle i er $x_{ij} = x_i$, $j = 1, 2, ..., N$, dels at virksomhederne har samme x_i/L_i, hvorfor $x_i/L_i = X/L$. Den aggregerede produktionsfunktion, som samfundsplanlæggeren står overfor, bliver derfor

$$Y = \sum_i Y_i = \sum_i y_i L_i = \sum_i AN(x_i/L_i)^\alpha L_i = AN(X/L)^\alpha L = ANL^{1-\alpha}X^\alpha, \tag{2.31}$$

hvor $X = Y_X/N = (Y - C - Y_R)/N$ iflg. (2.2), dvs. $Y_R = Y - C - NX$. Samfundsplanlæggerens problem er altså:

$$\max_{(c(t),X(t))_{t=0}^\infty} U_0 = \int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}e^{-\rho t}dt \qquad \text{ub.}$$
$$c(t) \geq 0, \; X(t) \geq 0,$$
$$\dot{N}(t) = \frac{1}{\eta}(Y(t) - c(t)L - N(t)X(t)), \quad Y(t) = AN(t)L^{1-\alpha}X(t)^\alpha, \quad N(0) \text{ given}, \tag{2.32}$$
$$N(t) \geq 0.$$

Løbende værdi-Hamiltonfunktionen bliver

$$H = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda\frac{1}{\eta}(Y - cL - NX),$$

hvor hjælpevariablen λ kan fortolkes som skyggeprisen på teknisk viden (langs den optimale bane). Førsteordensbetingelserne bliver

$$\partial H/\partial c = c^{-\theta} - \frac{\lambda}{\eta}L = 0, \qquad \text{dvs. } c^{-\theta} = \frac{\lambda}{\eta}L, \tag{2.33}$$

$$\partial H/\partial X = \frac{\lambda}{\eta}(\frac{\partial Y}{\partial X} - N) = 0, \qquad \text{dvs. } \frac{\partial Y}{\partial X} = \alpha\frac{Y}{X} = N, \tag{2.34}$$

$$\partial H/\partial N = \frac{\lambda}{\eta}(\frac{\partial Y}{\partial N} - X) = -\dot{\lambda} + \rho\lambda, \qquad \text{dvs. } -\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\eta}(\frac{\partial Y}{\partial N} - X) - \rho, \tag{2.35}$$

og transversalitetsbetingelsen bliver

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)e^{-\rho t}N(t) = 0.$$

Logaritmisk differentiation mht. t i (2.33) og indsætning af (2.35) giver samfundsplanlæggerens Keynes-Ramsey-regel

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{\eta}(\frac{\partial Y}{\partial N} - X) - \rho\right], \tag{2.36}$$

hvor

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = AL^{1-\alpha}X^{\alpha} = \frac{Y}{N} = \frac{X}{\alpha}, \quad \text{(fra (2.34)), dvs.} \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial N} - X = (\frac{1}{\alpha} - 1)X. \tag{2.38}$$

Fra (2.31) og (2.34) fås $\partial Y/\partial X = \alpha ANL^{1-\alpha}X^{\alpha-1} = N$, dvs.

$$X = (\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}L \equiv X_{SP}. \tag{2.39}$$

Indsætning af dette samt (2.38) i (2.36) giver

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[(\frac{1}{\alpha} - 1)\frac{L}{\eta}(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}} - \rho\right] \equiv \frac{1}{\theta}(r_{SP} - \rho) \equiv \gamma_{SP}. \tag{2.40}$$

Fra (2.39) og (2.31) har vi

$$Y = AL^{1-\alpha}X^{\alpha}N = AL^{1-\alpha}\left[(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}L\right]^{\alpha}N \tag{2.41}$$

$$= \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}A^{\frac{1}{1-\alpha}}LN \equiv \hat{A}N \equiv Y_{SP}, \tag{2.42}$$

hvoraf fås nettoporoduktionen (værditilvæksten)

$$Y - Y_X = Y - NX_{SP} \equiv \left[\hat{A} - (\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}L\right]N \equiv (\frac{1}{\alpha} - 1)(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}LN.$$

Ligesom markedsøkonomien fører altså samfundsplanlæggerens løsning frem til en "Ak-lignende model". Derfor vil samfundsplanlæggerens løsning opfylde, at $\dot{N}/N = \dot{y}/y = \dot{c}/c = \gamma_{SP}$ for alle t. Der vil altså ikke være nogen tilpasningsdynamik.

Ved sammenligning af markedsøkonomiens r med r_{SP} ses, at

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{L}{\eta}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{L}{\eta}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} r_{SP} < r_{SP}, \end{aligned}$$

da $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} < 1$. Derfor er markedsøkonomiens $\gamma < \gamma_{SP}$.

En fremstilling med mindre matematisk præcision kan også accepteres.

f) Baggrunden for forskellen mellem γ og γ_{SP} er monopolprisfastsættelsen på specialiserede inputvarer. Dette medfører, at prisen overstiger grænseomkostningen (der er 1) ved disses fremstilling. Denne inefficiens fører til for lav anvendelse af specialiserede inputvarer,

$$X = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}L = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}L = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}L \equiv \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}X_{SP} < X_{SP}.$$

To mulige alternative regeringsindgreb til løsning af problemet skal omtales.

Politik I. Regeringen giver et tilskud, s, til virksomhedernes køb af specialiserede inputvarer (og finansierer dette tilskud ved en ikke-forvridende skat, jf. nedenfor). Så vil brugerprisen blive $\bar{p} = (1-s)p = (1-s)/\alpha$. Efficiens kan opnås ved at vælge s sådan, at $\bar{p} = MC = 1$, dvs. $s = 1-\alpha$. Herved tilvejebringes samfundsplanlæggerens ressourceallokering. Efterspørgslen efter specialiserede inputvarer bliver nemlig nu, ifølge (2.12), $X = (\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}L \equiv X_{SP}$. Herved bliver iflg. (2.19) $r = (\frac{1}{\alpha}-1)\frac{L}{\eta}(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv r_{SP}$, og dermed opnås samfundsplanlæggerens vækstrate γ_{SP}.

Tilskuddet løser således i denne model ikke blot det statiske inefficiensproblem, at der er en samfundsmæssigt set for lav efterspørgsel efter specialiserede inputvarer. Tilskuddet løser også det dynamiske inefficiensproblem – at der er for ringe incitament til F&U. Dette skyldes, at den stimulerede efterspørgsel efter specialiserede inputvarer medfører større monopolprofit π og dermed større realrente i ligevægt, jf. (2.19), hvorved tilskyndelsen til forbrugsudskydelse forstærkes i præcis det omfang, der skal til for at opnå det optimale vækstforløb.

Politik II. Et alternativ til omkostningstilskuddet s er et produktionstilskud σ til basisvarevirksomhederne. Ved at producere Y_i får virksomhed nr. i da provenuet

$(1+\sigma)Y_i$, dvs. en profitmaksimeringsbetingelse bliver $(1+\sigma)\partial Y_i/\partial x_{ij} = p_j = 1/\alpha$. Den ønskede egenskab, $\partial Y_i/\partial x_{ij} = 1$ (= den samfundsmæssige omkostning ved at øge input af vare j med én enhed), opnås åbenbart ved at vælge $\sigma = 1/\alpha - 1$. Da herved

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_{ij}} = \frac{1}{1+\sigma}p_j = \alpha\frac{1}{\alpha} = 1,$$

fås, analogt til (2.10), $x_{ij} = (\alpha L)^{\frac{1}{1-\alpha}}L_i$ og dermed $X = (\alpha L)^{\frac{1}{1-\alpha}}L \equiv X_{SP}$, altså samme effekt som ved politik I.

En politik, der imidlertid *ikke* dur i denne model, er at give et subsidium σ til opfinderaktivitet proportionalt med opfindelsesomkostningen η. Ganske vist kan man herved opnå, at den private opfindelsesomkostning $\tilde{\eta} = (1-\sigma)\eta$ bliver sådan, at markedsøkonomiens vækstrate bliver lig γ_{SP}. Men X er uændret pga. monopolprisfastsættelsen for det enkelte specialiserede inputgode ($p = 1/\alpha > MC = 1$). Så X er stadig mindre end X_{SP}, og dermed bliver nettoproduktionen $Y - NX = AL^{1-\alpha}X^{\alpha}N - NX$ "for lille" (efficiensbetingelsen (2.34) er ikke opfyldt).[4]

Finansiering. Det er naturligt i en langsigtsmodel som nærværende at forudsætte balanceret budget. Til finansiering af politik I kræves skatteprovenuet $T = spNX_{SP} = [(1-\alpha)/\alpha]\, NX_{SP} \equiv T_I$. Benyttes politik II, er det krævede skatteprovenu $T = \sigma Y = [(1-\alpha)/\alpha]\, \hat{A}N \equiv T_{II}$. I begge tilfælde vokser det krævede skatteprovenu med raten γ_{SP}.

Finaniseringen skal så vidt muligt ske ved en ikke-forvridende skat. Antag først, at en lump-sum-skat med satsen $\tau(t)$ pr. husholdning benyttes. Så skal $\tau(t)$ sættes til T/L og altså vokse med raten γ_{SP}, ligesom T gør.

I *denne* model, hvor der ikke er nytte af fritid, er en konstant forbrugsskat imidlertid også egnet, da den vil *virke* som en lump-sum-skat. Hvis forbrugsskattesatsen er τ_c, betaler forbrugeren $(1+\tau_c)c$ for c forbrugsvarer, og statens provenu bliver $\tau_c cL$. Balanceret budget indebærer $\tau_c cL = T$, dvs.

$$\tau_c = \frac{T}{cL} = \text{ konstant},$$

da c og T vokser med samme rate, γ_{SP}. Da der ikke er nytte af fritid, kan en forbrugsskat højest bevirke en forvridning af forbrugets *tids*profil. Men forbrugsskattesatsen er som vist netop konstant og påvirker altså ikke forbrugets tidsprofil. Med andre ord opnås samfundsplanlæggerens løsning.

[4] Det er naturligvis heller ikke nogen løsning at afskaffe retten til at tage patent, da denne ret netop er nødvendig for at tilskynde virksomhederne til F&U.

Det skyldes modellens forenklede struktur, at kun ét økonomisk-politisk instrument er nødvendigt, nemlig kompensation til basisvarevirksomhederne for deres "for høje" udgift til specialiserede inputvarer pga. monopolpriserne. Som omtalt under pkt. a) er der i Romers 1990-model medtaget den (almindeligt anerkendte) positive eksterne effekt af F&U ("stå-på-skuldrene-af-tidligere-forskning-effekten"), der også optræder i andre modeller såsom Aghion & Howitt (1992), Jones (1995) og Dalgaard & Kreiner (2001). Så må der suppleres med et instrument, der direkte eller indirekte kompenserer F&U-aktiviteten for denne positive eksterne effekt.

En fremstilling med mindre matematisk præcision kan også accepteres.

g) (Dette er opgavesættets mere selvstændighedskrævende spørgsmål.) Når to lande, der er ens mht. α, A, η og L, integreres[5] fuldt ud, vil de tilsammen svare til et nyt land med samme α, A, og η, dobbelt så stor arbejdsstyrke, $L_0 = 2L$, men med to "regioner", lad os sige region 1 og 2, med hver sine præferencerarametre, (θ_1, ρ_1) og (θ_2, ρ_2). Realrenten i den integrerede økonomi bliver $r_0 = 2r$, jf. (2.19). I region 1 vokser pr. capita-forbruget med raten $\gamma_1 = \frac{1}{\theta_1}(r_0 - \rho_1)$ og i region 2 med raten $\gamma_2 = \frac{1}{\theta_2}(r_0 - \rho_2)$. Lad region 1 være den mest "tålmodige" region i betydningen, at $\gamma_1 > \gamma_2$. Region 1 vil så også have større vækst i formue, mens den utålmodige region vil blive mere og mere forgældet. På langt sigt vil region 1's formue og forbrug være dominerende. Idet det samlede forbrug er $C_0 \equiv c_1 L + c_2 L$, har vi

$$\begin{aligned}\frac{\dot{C}_0}{C_0} &= \frac{\dot{c}_1 L + \dot{c}_2 L}{c_1 L + c_2 L} = \frac{\dot{c}_1 + \dot{c}_2}{c_1 + c_2} = \frac{\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2}{c_1 + c_2} \\ &= \gamma_1 \frac{c_1}{c_1 + c_2} + \gamma_2 \frac{c_2}{c_1 + c_2} \to \gamma_1 \cdot 1 + 0 \text{ for } t \to \infty,\end{aligned}$$

da c_1 vedvarende vokser hurtigere end c_2. Den integrerede økonomis langsigtsvækstrate bliver altså $\gamma_y = \gamma_N = \gamma_1$, dvs. større end den ville være i hver af de to økonomier, hvis de var isolerede, jf. (2.22). Essensen bag dette er, at modellens pr.capita-vækstrate er en voksende lineær funktion af arbejdsstyrkens størrelse. Også "samfundsplanlæggerens pr.capita-vækstrate" vil i den integrerede økonomi blive større end i hver økonomi for sig.

h) Den under g) nævnte lineære effekt af landes integration forekommer uplausibelt stor. Effekten optræder ikke blot i nærværende forenklede model, men også i Romers 1990-model (her dog kun mht. størrelsen af den faglærte arbejdsstyrke).

[5] Nogle besvarelser angiver tvivl mht. hvad "integreres fuldt ud" betyder. Det er i orden at give sin egen fortolkning og analysere spørgsmålet herudfra.

Baggrunden for effekten er den ved d) omtalte skalaeffekt. Det empiriske belæg for skalaeffekter på vækstraten er begrænset, og for skalaeffekter i den størrelsesorden er der endnu mindre belæg.

Andre økonomer har derfor formuleret innovationsbaserede modeller uden en skalaeffekt på vækstraten. I Jones (1995) er $\bar{\delta}$ (2.5) ikke længere proportional med vidensniveauet N, men med N^{ϕ}, hvor $\phi < 1$. Herved bortfalder skalaeffekten på pr. capita-vækstraten. Denne bliver i stedet proportional med arbejdsstyrkens vækstrate, n. Til sammenligning kan nævnes, at Romermodellerne netop har problemer med at inkorporere vedvarende vækst i arbejdstyrken (jf., at $n = 0$ i ovenstående model).

Hos Dalgaard & Kreiner (2001) er der end ikke nogen positiv effekt af øget n på pr. capita-vækstraten. Dette opnår forfatterne ved at indbygge humankapitaldannelse og en essentiel naturressource i modellen. Herved fjerner de også (modsat Jones) skalaeffekten på niveau, dvs. på y. Det er dog næppe oplagt, at disse to resultater er virkeligheden nærmere end Jones' resultater. I hvert fald kan man argumentere med, at da teknisk viden er et ikke-rivaliserende gode, så *må* pr. capita-omkostningen, η/L, ved F&U være lavere jo større L er. Jo større må altså satsningen på F&U (eller imitation) blive - alt andet lige - , og dermed må der være en iboende tendens til en skalaeffekt af L på y og en positiv sammenhæng mellem n og pr.capita-vækstraten. At dette ikke ses i data for enkeltlande i en internationaliseret verden, udelukker ikke, at fænomenet kan gøre sig gældende på mere globalt plan.

Man kan også komme ind på, at til forskel fra opgavens forenklede model har de andre her nævnte alternative modeller en tilpasningsdynamik, dvs. økonomien behøver ikke fra starten at befinde sig i steady state. Så vil vækstraten i c, y og k i almindelighed ikke fra starten være ens, men dog over tid konvergere mod samme niveau (da modellerne er stabile).

3 Opg. 3.

a) Som de fleste synes at være indforstået med, skulle der i udsagnets anden linie ikke stå "end i de i", men "end de i".

Udsagnet er en påstand om, at β-konvergens medfører σ-konvergens og er dermed forkert, jf. B & S, s. 31. Rent bortset fra, at der teoretisk kunne være tale om et "overhalingsfænomen", så gælder det, at selv for lande med ens strukturelle karakteristika vil tilfældige påvirkninger altid gøre sig gældende, sådan at i bedste fald konvergerer den målte spredning på $\log y$ mod en positiv langsigtsværdi. Hvis den målte initialspredning tilfældigvis er mindre end langsigtsværdien, vil den observerede β-konvergens være forenelig med, at spredningen *voksede* over tid, indtil langsigtsniveauet nås.

b) Udsagnet er forkert. I begge modeller afhænger pr. capita-vækstraten positivt af arbejdsstyrkens vækstrate. Denne afhængighed er dog af mere fundamental karakter i Jones' model. Hos Lucas vil afhængigheden forsvinde, hvis man fjerner den (ubegrundede) asymmetri mellem humankapitaldannelse og fysisk kapitaldannelse, der findes i Lusmodellen. Stigningen (pr. tidsenhed) i humankapital pr. person i Lucasmodellen ser sådan ud:

$$\dot{h} = B(1-u)h - \delta_h h, \tag{3.1}$$

hvor $B(1-u)h$ er bruttoinvesteringen i uddannelse pr. person, og δ_h er "nedskrivningsraten" for humankapital. Men stigningen (pr. tidsenhed) i fysisk kapital pr. person ser sådan ud:

$$\dot{k} = y - c - (\delta_k + n)k,$$

hvor $y-c$ er bruttoinvestering i fysisk kapital pr. person, δ_k er "nedskrivningsraten" for fysisk kapital, og n er arbejdsstyrkens vækstrate. Til at opretholde uændret fysisk kapital pr. person, k, over tid kræves større pr. capita-bruttoinvestering, jo større befolkningsvækstraten n er, idet bruttoinvesteringen ikke blot skal modsvare deprecieringen, $\delta_k k$, men også sikre de nytilkomnes forsyning med kapital, nk. Men (3.1) indebærer, at der til at opretholde uændret *human*kapital pr. person, h, over tid kræves den *samme* pr. capita-bruttoinvestering, $B(1-u)h = \delta_h h$, uanset hvor stor befolkningsvækstraten er. Det er formentlig mere realistisk at lade den krævede pr. capita-bruttoinvestering være større, hvis der er relativt flere nytilkomne, dvs. relativt flere unge. Hvis humankapitalakkumulation på denne måde behandles *symmetrisk* med akkumulation af fysisk kapital, skal (3.1) erstattes af $\dot{h} = B(1-u)h - (\delta_h + n)h$. Så vil n ikke længere påvirke pr. capita-vækstraten i Lucasmodellen under jævn vækst.

4 Opg. 4

Da startværdien for indkomst pr. indbygger ikke er lavere i Sydkorea end i Filipinerne, kan forskellen i pr. capita-vækst ikke forklares som blot et udslag af den simple tilpasningsdynamik i en Solowmodel for lande med ens strukturelle karakteristika, men forskellig afstand til steady state. Men en Solow-baseret forklaring kunne være, at Sydkorea har haft højere opsparingskvote s eller lavere befolkningsvækstrate n, hvorved Sydkorea initialt kunne have større afstand op til sin steady state end Filipinerne og således tendere til at have større pr.-capita vækst i tilpasningsprocessen (der som bekendt er relativt tidskrævende).

Alternativt kunne en innovationsbaseret vækstmodel à la Jones (1995) benyttes. I denne model er pr.capita-vækstraten i steady state proportional med $n/(1-\phi)$, jf. pkt. h) i opg. 2. Hvis Sydkorea har højere n eller højere ϕ end Filipinerne, ville vi herudfra have en mulig forklaring på den observerede forskel i vækstrater. Selv hvis de to lande har samme n og ϕ, vil Jonesmodellen kunne give en forklaring, hvis Sydkoreas institutioner er mere innovationsfremmende end Filipinernes. Da vil der være tale om en *tilpasningsdynamisk* forklaring, idet Jonesmodellen "kun" genererer semi-endogen vækst.

Sydkorea og Filipinerne kan også ses som lande, der i større eller mindre omfang har samkvem (handelsmæssigt, teknologisk m.v.) med omverdenen og befinder sig midt i en indhentningsproces i forhold til den teknologiske frontlinie i verden. Hvis Sydkores institutioner og/eller humankapitalniveau indebærer større kapacitet til indhentning ("catching-up"), fås igen højere produktivitetsvækst i Sydkorea.

Pensums forskellige modeller med strengt endogen vækst kunne også benyttes (evt. opfattet som en forenklende tilnærmelse til en tilsvarende semi-endogen vækstmodel). Udover fx Romermodellen og Aghion-Howitt-modellen kunne man nævne Alesina & Rodrik (1994), der er en politisk-økonomisk model med strengt endogen vækst à la Barro (1990). Denne model inkorporerer *heterogenitet* i befolkningen (forskellig formue og forskellig arbejdsevne). Jo større den heraf resulterende grad af ulighed i indkomst (fx målt ved Gini-indekset) er, jo mere omfordeling vil medianvælgeren få igennem politisk. Men herved bliver afkastraten efter skat på opsparing mindre, hvilket fører til lavere pr.capita-vækst. Med andre ord skal man ud fra modellen forvente en negativ sammenhæng mellem grad af ulighed (før skat) og pr.capita-vækst. Den observerede forskel mellem Sydkorea og Filipinerne kan ses i lyset heraf, idet de to lande omkring 1960 faktisk var nogenlunde ens mht. en række strukturelle karakteristika *bortset* fra Gini-indekset. Dette viste netop langt større ulighed i Filipinerne.